Atrévete con PI
Tercer concurso de problemas matemáticos
Celebración del Día Internacional de las Matemáticas
14 de marzo de 2020
ETSIDI-UPM

El pasado 26 de noviembre de 2019 la UNESCO declaró Día Internacional de las Matemáticas el día 14 de marzo (tradicionalmente el día de PI, por el formato anglosajón de fechas 03/14/año). Para celebrarlo por todo lo alto en la UPM, desde la ETSIDI proponemos un concurso de problemas matemáticos.

Bases del concurso

(a) Podrá participar cualquier alumno de grado o máster matriculado en la UPM durante el curso actual.

(b) Se valorará la originalidad en el enfoque de cada problema (aunque no tengan una solución completa) y la claridad en la presentación.

(c) Las soluciones deben enviarse, **antes de las 14:03 horas del jueves 5 de marzo**, a cualquiera de las siguientes direcciones de correo electrónico:

carmen.garciamiguel@upm.es

pedro.gmanchon@upm.es

(d) El formato de la solución será necesariamente un único documento PDF. En la cabecera deberá figurar la siguiente información:

- Nombre y apellidos.
- Grado/Máster y Escuela.
- Dirección de correo electrónico.
- Un número de teléfono (opcional).

(e) La entrega de premios (por determinar) tendrá lugar el miércoles 11 de marzo, en el Salón de Actos de la ETSIDI (Ronda de Valencia, 3).

Problemas preparados por Carmen García-Miguel Fernández y Pedro M. González Manchón

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial (ETSIDI)

Pasa la hoja... y ¡comienza a pensar!

Reto 1

El número irracional π está presente en muchos ámbitos de la ingeniería y la ciencia en general. Casi tan fascinante como π es el también irracional NÚMERO ÁUREO

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots$$

también denominado razón áurea o *divina proporción*. Para entender la razón de este último nombre, imagina que partes un segmento en dos de longitudes a y b, de forma que la longitud del segmento original dividida entre la del segmento mayor, coincida con la del segmento mayor entre la del menor; entonces dicha proporción es el número áureo, es decir,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

Ambos números, π y φ, están relacionados de múltiples formas. Te retamos a que pruebes lo siguiente:

(a) Demuestra que φ es el radio de la circunferencia que circunscribe a un decágono regular de lado unidad.

(b) Demuestra que

$$\frac{\varphi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Reto 2

¿Sabías que un balón de fútbol se fabrica utilizando exactamente 12 pentágonos y 20 hexágonos? El balón constituye un ejemplo de lo que se denomina *fullereno*. Un fullereno es un poliedro de grado tres construido exclusivamente con pentágonos y hexágonos (que sea de grado tres significa que en cada vértice concurren exactamente tres polígonos). El nombre hace honor al arquitecto Richard B. Fuller, quien diseñó un pabellón esférico con dicha estructura en la Exposición Universal de Montreal de 1967.

(a) Demuestra lo siguiente: si fabricamos un balón usando cualquier tipo de polígonos, incluso permitiendo que en cualquier vértice puedan concurrir más de tres polígonos, se verifica que $V - A + C = 2$ donde V es el número de vértices, A es el número de aristas y C es el número de caras.

(b) Utiliza la información del apartado anterior (no importa que no hayas conseguido probarlo) para demostrar que, si fabricamos un balón solo con pentágonos y hexágonos y teniendo el poliedro grado tres, se necesitan exactamente 12 pentágonos.

(c) ¿Son necesarios 20 hexágonos? Si la respuesta es negativa, muestra un ejemplo.

(d) ¿Hay algún fullereno con al menos un pentágono y un hexágono que tenga la forma de un toro (un toro es una superficie con la forma de un flotador o un *donuts*)?